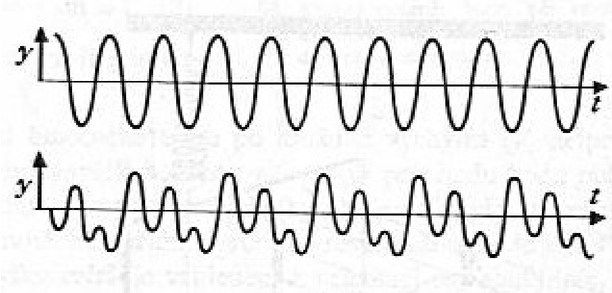
Kmitání, vlnění, akustika
1. Kmitavý pohyb

1.1 Pojem kmitavého pohybu

Děj, který se opakuje v určitém časovém intervalu. Opakuje-li se pravidelně nějaký pohybový stav nazýváme ho **periodický pohyb**.

Mění-li se pravidelně s časem jiná fyzikální vlastnost (teplota, elektrické napětí, hustota prostředí) mluvíme o **periodickém ději**.



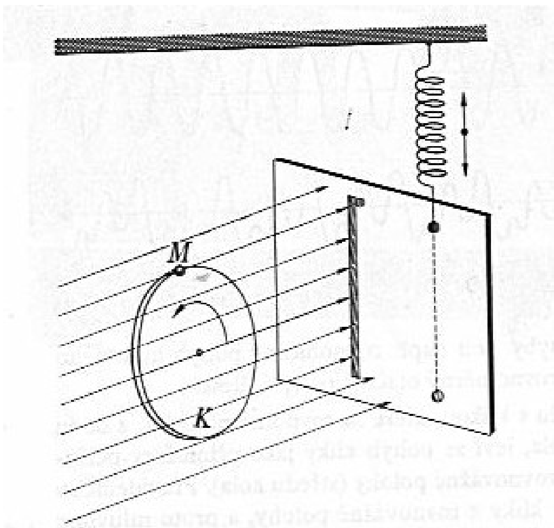
91. Grafy periodických křivek

Periodický pohyb – opakuje-li se pohybový stav hmotného bodu (tělesa), určený polohou,rychlostí a zrychlením.
Perioda – doba v níž se stav opakuje. Označení: T. Jednotka: [T] = s
Frekvence – kolikrát se daný pohyb opakuje za jednu sekundu. Označení: f. Jednotka: [f] = s^{-1}

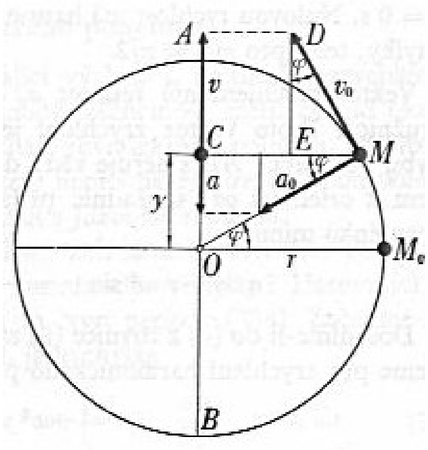
Vztah frekvence a periody: $f = \frac{1}{T}$.

Kmitavý pohyb – pravidelně se opakující výchylky z rovnovážné polohy a označujeme jej jako přímočarý pohyb.
Vlastnosti: mění se okamžitá výchylka, rychlost, zrychlení.
Amplituda – maximální výchylka.

1.2 Harmonický kmitavý pohyb



Kolmý průmět bodu při pohybu po kružnici se jeví jako pohyb kmitavý.



Hmotný bod M se pohybuje po kružnici s úhlovou rychlostí ω .
Rychlost obíhajícího bodu $v_0 = r \cdot \omega$ a jeho zrychlení mířící do středu je $a_0 = r \cdot \omega^2$
Průmět bodu M do AB určuje velikost výchylky ozn. y. V bodě M_0 je výchylka y = 0.
Nechť je od M_0O odchylka o úhel $\varphi = \omega \cdot t$ a promítá se do bodu C.
Výchylku stanovíme $y = r \cdot \sin\varphi = r \cdot \sin\omega t$.
Největší výchylka je v bodě A: $y_0 = r$, pak klesá k nule, pak roste do –r a opět jde k nule.
Periodický pohyb při němž je výchylka funkcí sinus nebo kosinus při rostoucím úhlu je harmonický pohyb.

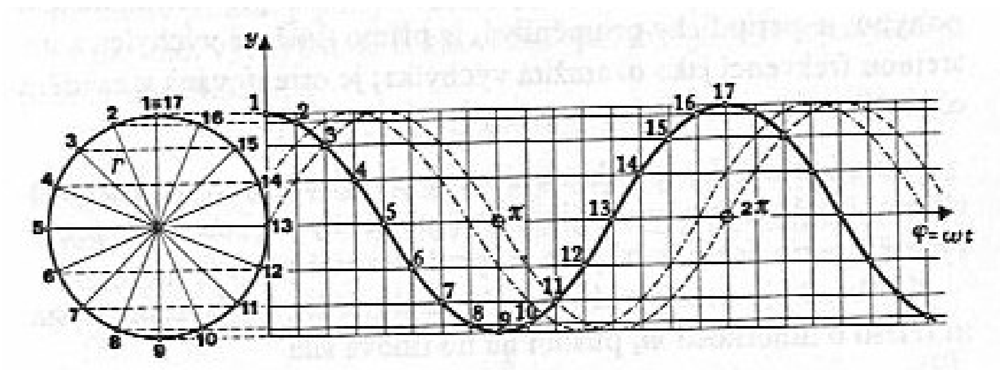
Rychlost kmitavého pohybu:
Určíme si jej z obrázku a trojúhelníku MED a výsledný vztah je: $v = r \cdot \omega \cdot \cos\varphi = r \cdot \omega \cdot \cos\omega t$
Okamžitá rychlost se též mění periodicky – největší je v rovnovážné poloze.

Zrychlení (okamžité) kmitavého pohybu:
Vektor zrychlení vždy směřuje do středu a má opačnou orientaci než vektor rychlosti.
$a = -a_0 \cdot \sin\varphi = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin\omega t = -\omega^2 \cdot y$

Harmonický pohyb je takový pohyb, při němž je vektor zrychlení orientován do rovnovážné polohy a jeho velikost je přímo úměrná okamžité výchylce: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
ω - úhlová frekvence
ω t - fáze

1.3 Fáze kmitavého pohybu

Vztahy pro y, a, v platí tehdy, měříme-li čas od průchodu rovnovážnou polohou. Dva pohyby téže frekvence, které nemají současně rovnovážnou polohou kmitají s fázovým rozdílem.
Je-li počáteční fáze φ_0, pak: $y = r \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$. $\varphi_0 > 0$ posun základního grafu vlevo, je-li $\varphi_0 < 0$ posun základního grafu vpravo.

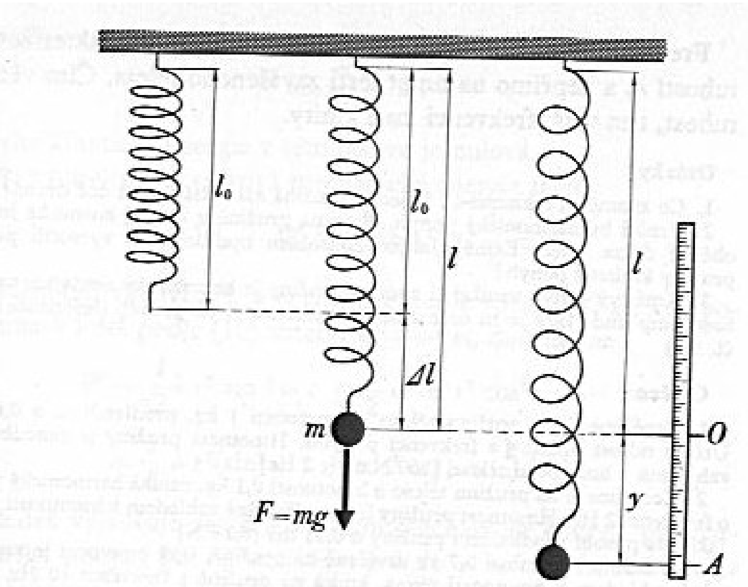


1.4 Kmitavý pohyb tělesa na pružné spirále

Zajímá nás síla, která způsobuje pohyb tělesa na pružné spirále (pružině).

Podle druhého pohybového zákona můžeme psát vztah pro sílu: $F = a \cdot m = -\omega^2 \cdot y$

F je síla, která uděluje zrychlení hmotnému bodu při harmonickém pohybu, je periodicky proměnlivá, je přímo úměrná výchylce a má stejnou frekvenci jako okamžitá výchylka a je orientována do rovnovážné polohy.



Mějme spirálu délky l_0, při zavěšení tělesa hmotnosti m působí tíhová síla $F_G = m \cdot g$. Dojde k prodloužení spirály o $\Delta l = l - l_0$.

Na těleso působí síla F´ stejně veliká jako síla F_G, ale směřuje vzhůru a můžeme ji určit takto: $F' = k \cdot \Delta l$, k – tuhost spirály.

Platí $F' = F_G$. Můžeme za obě síly dosadit a dostaneme rovnici: $m \cdot g = k \cdot \Delta l$ - těleso je v klidu a rovnováze.

Při prodloužení o y a uvolnění vzniká kmitavý pohyb kolem rovnovážné polohy.

Ve výchylce působí na těleso síla $F = mg - k \cdot (\Delta l + y) = -k \cdot y$ a je orientována do rovnovážné polohy. Je to podmínka ke vzniku harmonického pohybu.

Zrychlení tohoto pohybu je $a = -\frac{k}{m} \cdot y$

Můžeme určit rovnici $-\omega^2 \cdot y = -\frac{k}{m} \cdot y$ a z ní vyjádříme omegu: $\omega^2 = \frac{k}{m}$ a odtud můžeme určit frekvenci $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

Frekvence nezávisí na amplitudě.

1.5 Skládání harmonických pohybů v jedné přímce

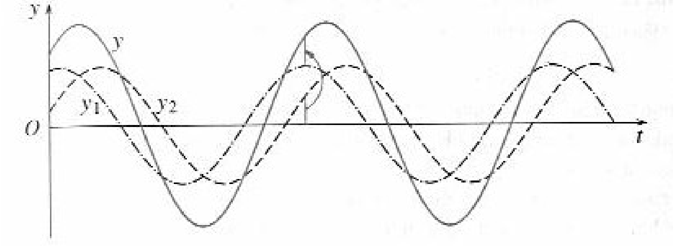
Vykonává-li bod současně dva harmonické pohyby, probíhají oba pohyby vzhledem ke zvolené inerciální vztažné soustavě navzájem nezávisle.

Nejjednodušeji výsledek dostaneme superpozicí dvou harmonických kmitání o stejné amplitudě ($y_{m1} = y_{m2} = y_m$), která probíhají v jedné přímce a se stejnou úhlovou frekvencí. Jejich výchylky vyjadřují rovnice:

$y_1 = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_{01})$

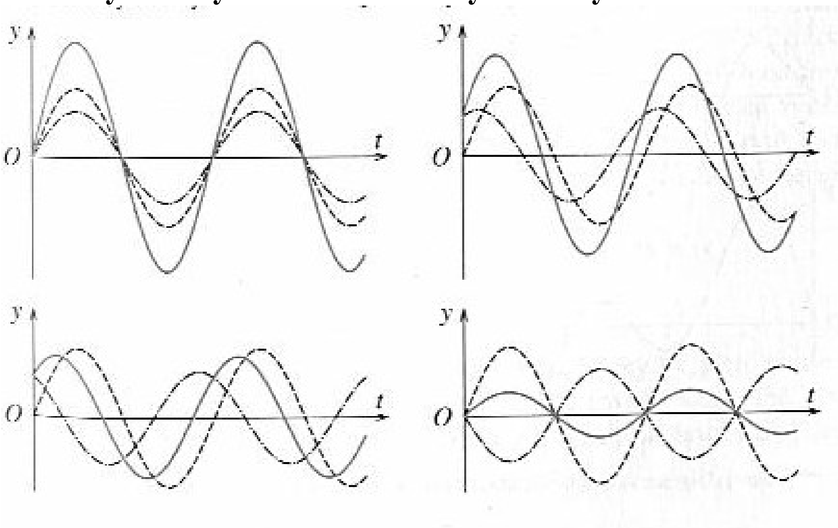
$y_2 = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_{02})$

Použijeme grafickou metodu.



Sečteme, popřípadě odečteme délky úseček odpovídajících výchylkám v jednotlivých okamžicích s přihlédnutím ke znaménku výchylky. Křivka proložená koncovými body součtu úseček určuje časový průběh složeného kmitání.

Příklady složených kmitání s různým fázovým rozdílem složek



1.6 Harmonický pohyb z hlediska energie

Při uvedení pružiny do pohybu působíme na pružinu silou, jejíž velikost roste přímo úměrně s prodloužením: F = k y

Práce vykonaná při prodloužení pružiny: $W = \frac{1}{2} \cdot F \cdot y = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2$

V krajním bodě výchylky se kmitající závaží zastaví, a proto má v této poloze jenom potenciální energii: $W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2 \cdot \sin^2 \omega t$.

Práce pro amplitudu $t = \frac{T}{4}$:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2 \cdot \sin^2 \omega \frac{T}{4} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2$$

Celková energie:

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2 \cdot \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t =$$

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2 \left(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t \right) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot r^2$$

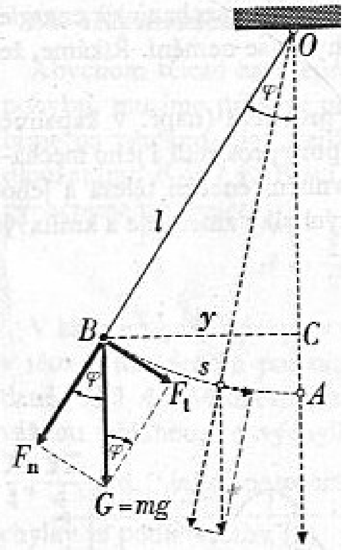
Při harmonickém pohybu se mění kinetická energie v potenciální energii a naopak, přičemž v každém okamžiku je jejich součet stálý.
Neměnÿ-li se energie je výchylka stálá a jedná se o netlumený pohyb.

Koná-li se kmitavý pohyb v určitém prostředí, působí na kmity síly odporu. Mechanická energie se spotřebovává na překonání těchto sil. Výchylka se začne zmenšovat a nastane tlumený pohyb.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = k$$

1.7 Matematické kyvadlo

Matematické kyvadlo je těleso velmi malých rozměrů zavěšené na vlákně stálé délky, jehož hmotnost je zanedbatelná vzhledem k hmotnosti tělesa.



Tíhová síla G se rozkládá na dvě složky F_n a F_t.

$F_n = m \cdot g \cdot \cos\varphi$ a $F_t = -m \cdot g \cdot \sin\varphi$ - tato síla napíná vlákno a ruší se v důsledku pevnosti závěsu.

Předpokládejme, že platí $\varphi < 5^\circ$, potom se sinus úhlu téměř neliší od úhlu měřeného v radiánech a můžeme psát $\sin\varphi \approx \varphi = \frac{y}{l}$, kde y je přibližně BA (oblouková výchylka kyvadla).

Zrychlení kyvadla:

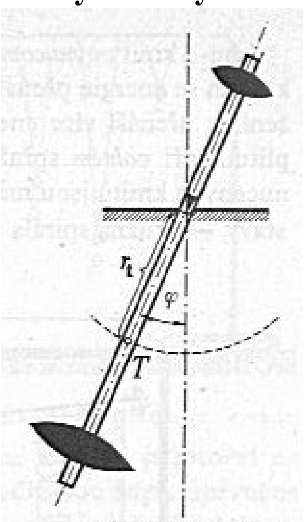
$a = \frac{F_t}{m} = -g \cdot \frac{y}{l} = -\omega^2 \cdot y$ - je přímo úměrné výchylce, proto při malých rozkyvech koná matematické kyvadlo harmonický pohyb.

Doba kmitu kyvadla:

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} = \frac{g}{l} \Rightarrow T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.8 Fyzické kyvadlo



Je to každé těleso otáčivé okolo osy, těžiště kmitá po kruhovém oblouku.

Při vychýlení fyzického kyvadla z rovnovážné polohy o úhel φ působí na kyvadlo moment síly o velikosti: $M = -m \cdot r_t \cdot g \cdot \sin\varphi$.

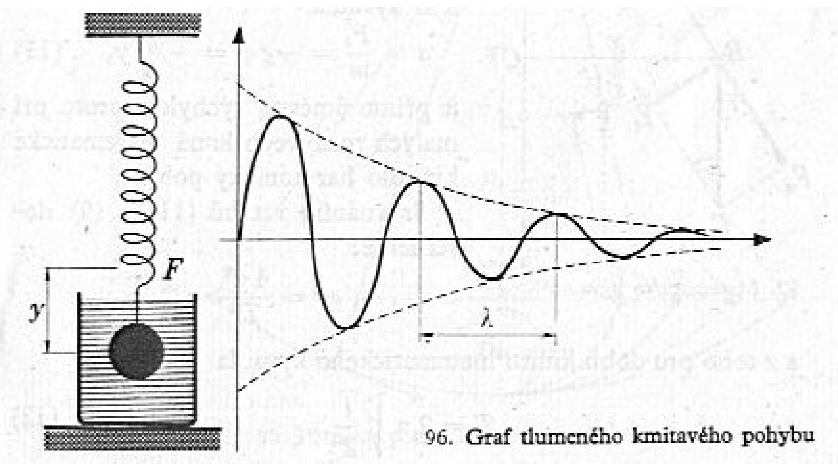
Fyzické kyvadlo se používá:

1. jako regulátor hodin (vzhledem k regulovatelnosti periody)
2. k měření tíhového zrychlení
3. v geodézii a v seizmice

Tíhové zrychlení se měří reverzním (převratným) kyvadlem. Reverzní kyvadlo má dvě osy se stejnou dobu kyvu.

Délka matematického kyvadla, které má stejnou dobu kyvu jako dané fyzické kyvadlo, se nazývá redukovaná délka daného fyzického kyvadla. Je-li l^* redukovaná délka reverzního kyvadla – vzájemná vzdálenost obou os), pak je jeho doba kyvu $t' = \pi \cdot \sqrt{\frac{l^*}{g}}$. Odtud vypočítáme tíhové zrychlení: $g = \frac{\pi^2 \cdot l^*}{t'^2}$

1.9 Tlumený mechanický oscilátor



96. Graf tlumeného kmitavého pohybu

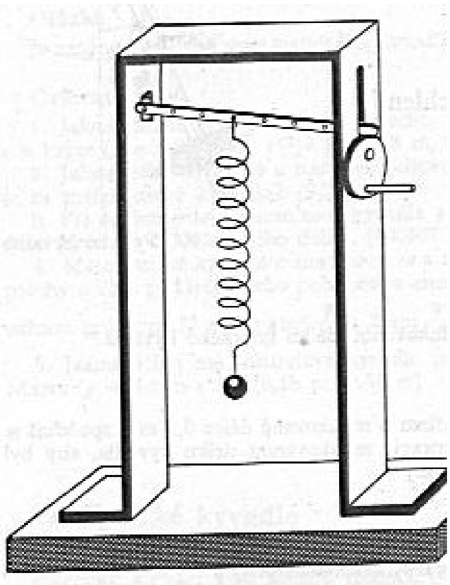
Konají-li se kmity v určitém prostředí, působí zde síly odporu – mechanická energie se spotřebovává na překonání těchto sil a amplituda se zmenšuje – tlumený pohyb

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = k$$

To platí pro obě části grafu.
Rovnice vyjadřující tlumené kmity: $y = r \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$
b – koeficient útlumu

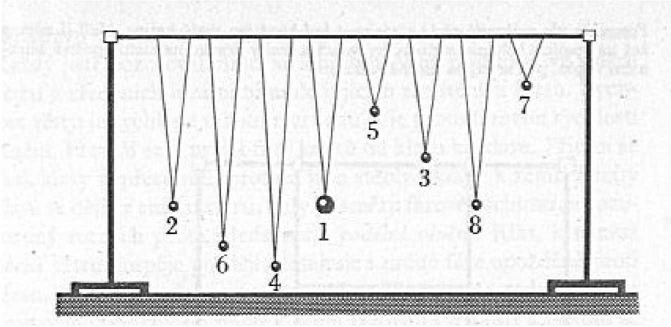
Praktické využití tlumeného kmitání:
Nápravy automobilů jsou spojeny s pružinami, které umožňují pérování náprav, a tím zajišťují pohyb automobilu bez velkých výkyvů i po nerovném terénu. Tyto pružiny společně s hmotností automobilu však vytváření mechanický oscilátor, který by se po najetí na terénní nerovnost nebezpečně rozkmital. Proto jsou pružiny doplněny tlumiči pérování, které kmitání automobilu rychle utlumí.

1.10 Kmity vlastní a nucené. Rezonance



Má-li soustava, v níž se může kinetická energie měnit na energii potenciální a naopak, jednu z těchto energií, rozkmitá se. Mění-li se tato energie na jiné formy energií je kmitání trvalé, v opačném případě se utlumí. Pak říkáme, že soustava koná vlastní kmity. Aby trvale kmitala i soustava, jejíž vlastní kmity se ztrátami energie tlumí, musíme jí dodávat trvale energii a to pravidelně (periodicky). Mluvíme o tlumených kmitech.
Jsou-li kmity vynucovány přiváděním energie, nazývá se způsob přenesení energie – **spřažení**.
Při těsném se přenáší více energie než při volném.

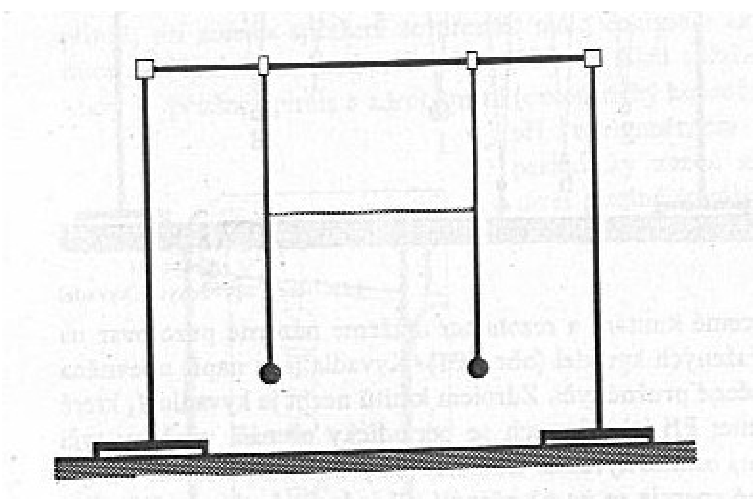
Rezonance
Při nucených kmitech je proto důležitý případ rovnosti nucené a vlastní frekvence, kdy vznikají kmity o velké amplitudě výchylky. **Nastává rezonance**. Nucené kmity při rezonanci vznikají i při velmi volném spřažení.
Při těsném spřažení může amplituda tak vzrůst, že se poruší celistvost materiálu.



Zdrojem vlnění je 1. Čím je kyvadlo dále od 1, tím je vazba volnější. Kyvadla 4 a 5 jsou s kyvadlem 1 těsněji, ale mají odlišné délky, a odlišné vlastní frekvence, rozkmitají se s nejmenší amplitudou výchylky. Proti tomu kyvadla 2 a 8, jež mají stejnou délku a stejnou vlastní frekvenci jako kyvadlo 1, se rozkmitají s větší amplitudou výchylky. Představují případ rezonance.

Praktické využití:
Loď na moři se silně rozhoupá, má-li příboj vln frekvenci rovnou frekvenci vlastních kmitů lodi jako pružného tělesa. Kmity lodi se tlumí Frahnovým tankem (vodní nádrží s frekvencí kmitů vody shodnou s frekvencí kmitů lodi). Potom se víc rozkmitá voda v tanku a loď koná jen malé kmity.
Mají-li nárazy kol na spojích kolejnic stejnou frekvenci s kmity pružin, na nichž spočívá železniční vagón, pak se vagón značně rozkmitá.

1.11 Spřažené oscilátory



Je-li, zdrojem budicí síly pro tlumený oscilátor jiný oscilátor nazýváme je oscilátory spřaženými. Zařízení, které silové působení nebo energii přenáší, nazýváme vazba oscilátorů.
Přenášení energie z 1 na druhý a naopak.
Aby, tlumený oscilátor mohl trvale kmitat s vlastní frekvencí a konstantní amplitudou musí přijmout z vnějšího zdroje tolik energie během každé periody, jakou ve stejné době odevzdal svému okolí.
Funguje zde zpětná vazba. Oscilátor vlastním pohybem reguluje přívod energie z vnějšího zdroje.
Příklad: kyvadlo hodin